

Graf - Münster - Gymnasium Bayreuth

---

K o l l e g s t u f e

Jahrgang 1986/87

F A C H A R B E I T

Leistungskurs:           Mathematik  
Kursleiter     :       Studiendirektor Baumgärtel  
Verfasser     :       Thomas Ziegler

Thema:                   DIE ANWENDUNG DER KOMPLEXEN ZAHLEN  
                          AUF SCHWINGUNGSPROBLEME

Datum der Abgabe   : 16. Februar 1987

Einfache Punktzahl: .....

Note:                .....

Unterschrift des Kursleiters: .....

# INHALT

	Seite
Vorwort.....	3
1 Grundlagen.....	4
2 Die Eulersche Formel.....	5
2.1 Die Sinusreihe.....	6
2.2 Die Cosinusreihe.....	8
2.3 Die Exponentialreihe.....	8
2.4 Identifikation im Komplexen.....	8
3 Harmonische Schwingungen.....	10
3.1 Zeigerdarstellung harmonischer Schwingungen.....	10
3.2 Komplexe Darstellung einer harmonischen Schwingung.....	11
3.2.1 Differentiation und Integration der komplexen Schwingungsfunktion.....	12
3.2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schwingung im Komplexen.....	14
3.3 Reelle Schwingungsfunktionen in konjugiert komplexer Darstellung.....	15
3.4 Überlagerung harmonischer Schwingungen.....	18
3.4.1 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz.....	18
3.4.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenz.....	21
3.4.3 Schwebungen.....	22
4 Periodische Schwingungen.....	26
4.1 Fourieranalyse periodischer Schwingungen.....	27
4.1.1 Beweis der Orthogonalitätsrelationen.....	31
4.2 Sätze zur Fourieranalyse.....	32
4.3 Anwendung der Fourieranalyse.....	33
4.3.1 Fourieranalyse des Rechteckimpulses.....	33
4.3.2 Fourieranalyse der Sägezahnschwingung.....	35
4.3.3 Fourieranalyse der Dreieckschwingung.....	37
Literaturverzeichnis.....	39
Erklärung.....	40

## VORWORT

Auf Schwingungen trifft man nahezu in allen Teildisziplinen der Physik: vor allem in Mechanik, Akustik, Optik, Elektrizitätslehre und Atomphysik. Diese Vielfalt des Phänomens der Schwingung motiviert zum Entwurf eines allgemeingültigen und abstrakten Schwingungsmodells. Hierzu stellt die Mathematik mit den komplexen Zahlen ein hilfreiches Werkzeug zur Verfügung, welches im Vergleich zum reellen Zahlenbereich besonders im Hinblick auf Rechenaufwand und Aussagekraft entscheidende Vorteile bietet.

Das mathematische Instrumentarium für Schwingungsbetrachtungen reicht jedoch weit über das Gebiet der komplexen Zahlen hinaus, denn neben Grundwissen in Geometrie, Trigonometrie und Analysis ist vor allem (bei der Herleitung der Eulerschen Formel und den Fourierreihen) die Kenntnis von unendlichen Reihen erforderlich. Um unmittelbar auf dem Wissen der Kollegstufe aufzubauen, wird in der Facharbeit nach einer kurzen Wiederholung der als bekannt vorausgesetzten Grundlagen die Eulersche Formel, eine fundamentale Beziehung für die nachfolgenden Untersuchungen, hergeleitet. Für die Herleitung im zweiten Kapitel ist zunächst ein kleiner Exkurs über die Taylorsche Reihenentwicklung notwendig. Kapitel drei befaßt sich überwiegend mit der Darstellung harmonischer Schwingungen und mit verschiedenen Arten der Überlagerung. Die theoretische Herleitung sowie die Anwendung der komplexen und reellen Fourieranalyse wird im Abschnitt vier behandelt, an dessen Ende die Fourierreihen einfacher periodischer Schwingungen berechnet werden.

Beim Entwurf der Facharbeit galt mein Anliegen zwei sich gegenüberstehenden Forderungen: Einerseits sollte die Arbeit für jeden Kollegiaten des LK Mathematik verständlich geschrieben werden, also das Thema ausführlich darstellen und möglichst wenig unbegründet im Raum stehen lassen. Andererseits sollten sich die Untersuchungen nicht an unwesentlichen Einzelheiten aufhalten, durch die man den Gesamtüberblick und das eigentliche Thema aus dem Auge verliert. Ich hoffe, in meiner Arbeit das richtige Verhältnis zwischen beiden Gesichtspunkten gefunden zu haben.

Thomas Ziegler

## 1 GRUNDLAGEN

Komplexe Zahlen lassen sich formal als *Linearkombinationen* reeller Zahlen  $x$  und  $y$  auffassen:

$$z = x + iy \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Die imaginäre Einheit  $i$  ist durch

$$i^2 = -1 \quad (1.2)$$

definiert. Auf der *Gaußschen Zahlenebene* (Abb.1) werden komplexe Zahlen als Punkte mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  dargestellt, wobei  $x = \operatorname{Re}(z)$  der Realteil und  $y = \operatorname{Im}(z)$  der Imaginärteil der komplexen Zahl ist.

Spiegelt man  $z$  an der reellen Achse, so erhält man die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = x - iy \quad , \quad (1.3)$$

für die gilt:  $\operatorname{Re}(z^*) = \operatorname{Re}(z)$  und  $\operatorname{Im}(z^*) = -\operatorname{Im}(z)$ .

Aus den Gleichungen (1.1) mit (1.3) folgen außerdem die Rechengesetze:

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2 \quad (1.4)$$

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z) \quad (1.5)$$

$$z - z^* = 2i \operatorname{Im}(z) \quad (1.6)$$

Komplexe Zahlen lassen sich auch in der Polarform<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} z &= |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ z^* &= |z| \cdot (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \end{aligned} \quad (1.7)$$

darstellen, wo die Beziehungen

$$x = \operatorname{Re}(z) = |z| \cdot \cos\varphi \quad (1.8)$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = |z| \cdot \sin\varphi \quad (1.9)$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \quad (1.10)$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (1.11)$$

gelten (vgl. Abb.1).

---

<sup>1</sup>Häufig verwendet man hier die Abkürzung  $E(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$

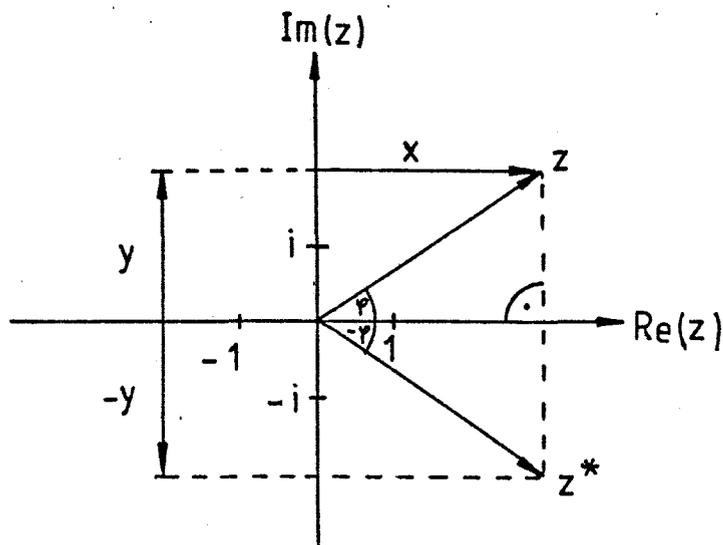


Abb.1

Anhand der Additionstheoreme lassen sich noch folgende wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Summe  $\cos\varphi + i\sin\varphi$  herleiten:

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \quad \text{"Moivre"}$$

## 2 DIE EULERSCHE FORMEL

Die drei letzten Gleichungen erinnern stark an die Rechenregeln für Potenzen. Diese Beobachtung läßt vermuten, daß es sich bei  $\cos\varphi + i\sin\varphi$  um eine mit den Exponentialfunktionen zumindest verwandte Funktion handelt. Um die zwei Funktionsklassen -trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktionen- miteinander in Beziehung bringen zu können, ist es folglich notwendig, beide in eine dritte Funktionenklasse, die Polynomfunktionen, umzuwandeln. Dies geschieht mit Hilfe des im folgenden beschriebenen Verfahrens der *Taylor-Entwicklung*.

## 2.1 DIE SINUSREIHE

Zunächst betrachtet man eine ganzrationale Funktion n-ten Grades:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

und ihre Ableitungen:

$$p_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1$$

$$p_n''(x) = (n-1) n a_n x^{n-2} + (n-2)(n-1) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 6 a_3 x + 2 a_2$$

$$p_n'''(x) = (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3} + \dots + 6 a_3$$

$$\begin{matrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_n^{(k)}(x) & = & \dots + k(k-1)(k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_k & = & \dots + k! \cdot a_k \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_n^{(n)}(x) & = & n! \cdot a_n \end{matrix}$$

Die Koeffizienten des Polynoms sind nun so zu bestimmen, daß  $p_n(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$  sowohl in Funktionswert, als auch in allen Ableitungen mit  $f(x) = \sin(x)$  übereinstimmt:

$$\begin{array}{llllll} f(x_0) & = & \sin(0) = 0 & = p_n(0) & = & 0! \cdot a_0 & \Rightarrow a_0 = & 0 \\ f'(x_0) & = & \cos(0) = 1 & = p_n'(0) & = & 1! \cdot a_1 & \Rightarrow a_1 = & 1 \\ f''(x_0) & = & -\sin(0) = 0 & = p_n''(0) & = & 2! \cdot a_2 & \Rightarrow a_2 = & 0 \\ f'''(x_0) & = & -\cos(0) = -1 & = p_n'''(0) & = & 3! \cdot a_3 & \Rightarrow a_3 = & -\frac{1}{3!} \\ f''''(x_0) & = & \sin(0) = 0 & = p_n''''(0) & = & 4! \cdot a_4 & \Rightarrow a_4 = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \end{array}$$

Das gesuchte Polynom n-ten Grades lautet somit:

$$p_n(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 +$$

$$+ \dots \left\{ \begin{array}{ll} + 0 & \text{für } n = 4m \\ + \frac{1}{n!} \cdot x^n & \text{für } n = 4m + 1 \\ + 0 & \text{für } n = 4m + 2 \\ - \frac{1}{n!} \cdot x^n & \text{für } n = 4m + 3 \end{array} \right. \quad m \in \mathbb{N}$$

Mit dieser Gleichung lässt sich sogar für jedes beliebige  $x$  der Wert von  $\sin x$  mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen, denn wie aus Abb.2 hervorgeht, schmiegen sich die Graphen der Polynome offensichtlich mit steigendem Grad immer enger abwechselnd von oben und von unten an den Graphen  $\sin x$  an<sup>2</sup>; sie konvergieren gegen  $G_{f(x)=\sin x}$ .

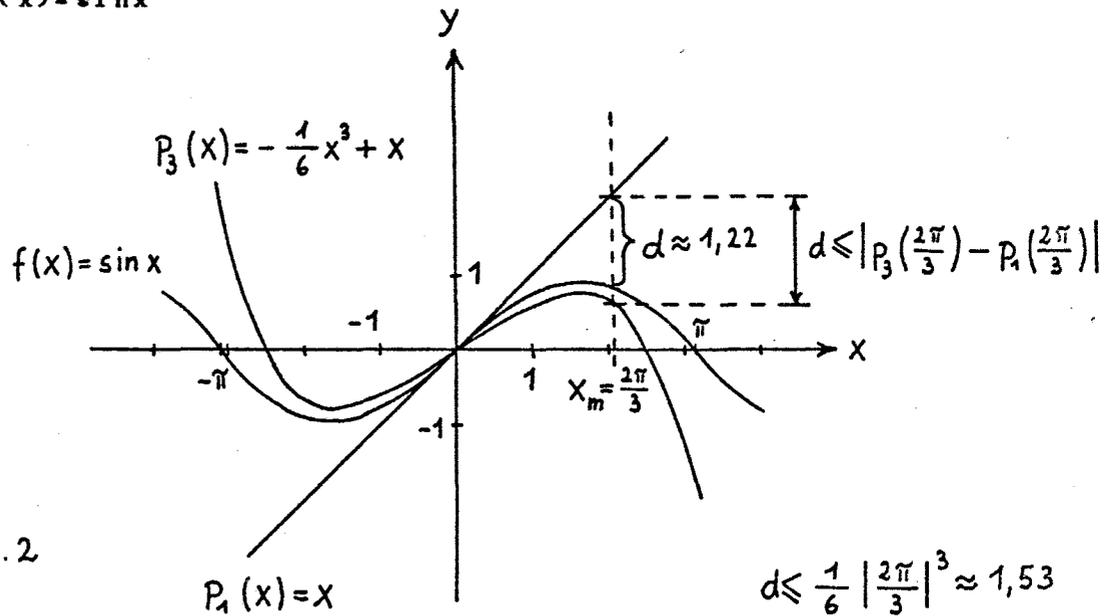


Abb.2

Der Graph  $G_{f(x)=\sin x}$  liegt also zwischen den Graphen der zwei Polynome  $p_n$  und  $p_{n-2}$ .

Bei beliebigem  $x_m$  gilt für die maximale Abweichung  $d$  vom tatsächlichen Wert  $\sin(x_m)$  :

$$d \leq |p_n(x_m) - p_{n-2}(x_m)| = \frac{1}{n!} \cdot |x_m|^n, \quad n > 2 \text{ und ungerade.}$$

Da der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \cdot |x_m|^n = 0$  existiert, d.h. die Abweichung bei einem über alle Grenzen wachsenden Polynomgrad ver-

<sup>2</sup>Den Beweis hierfür liefert auch die wiederholte Integration der für alle  $t \neq 2n\pi$ ;  $n \in \mathbb{Z}$  gültigen Ungleichung  $\cos t < 1$  zwischen den Grenzen  $0$  und  $x > 0$ .

(vgl. Keil, Kratz, Müller, Wörle: Analysis 2, S.350)

schwindet, gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  die unendliche Reihe:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots = & (2.1) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \cdot \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \end{aligned}$$

## 2.2 DIE COSINUSREIHE

Die Taylor-Entwicklung auf  $\cos x$  angewandt ergibt analog:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots = & (2.2) \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \cdot \frac{x^{2q}}{(2q)!} \end{aligned}$$

## 2.3 DIE EXPONENTIALREIHE

Im Unterricht wurde nach dem gleichen Verfahren bereits die Exponentialreihenentwicklung für  $e^x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  durchgeführt. Es läßt sich auch hier wie bei der Sinusreihe zeigen, daß die Aussage

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!} \cdot x^q \quad (2.3)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  Gültigkeit hat.

## 2.4 IDENTIFIKATION IM KOMPLEXEN

Setzt man  $x = i\varphi$  in (2.3), so wird

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2!} \varphi^2 - i\frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{4!} \varphi^4 + i\frac{1}{5!} \varphi^5 + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!} \varphi^2 + \frac{1}{4!} \varphi^4 + \dots\right) + i\left(\varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 + \dots\right) = \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

Es ergibt sich folgende nach Euler benannte Gleichung:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad (2.4)$$

Die Eulersche Formel stellt -wie sich in den nächsten Kapiteln zeigen wird- vor allem im Hinblick auf die mathematische Behandlung harmonischer Schwingungen ein elementares Hilfsmittel dar; einerseits deshalb, weil für die Funktion  $e^{i\varphi}$  die gleichen Rechenregeln gelten wie für die Exponentialfunktion im Reellen, insbesondere aber aus dem Grund, daß mit dieser Formel komplizierte Additionstheoreme umgangen werden können.

Für eine beliebige komplexe Zahl folgt daraus:

$$\begin{aligned} z &= |z| \cdot e^{i\varphi} \\ z^* &= |z| \cdot e^{-i\varphi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Addition bzw. Subtraktion von  $z$  und  $z^*$  ergibt mit (1.5) und (1.8) bzw. (1.6) und (1.9)

$$\begin{aligned} z + z^* &= |z| \cdot ( e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} ) = 2 \operatorname{Re}(z) = 2x = 2|z|\cos\varphi \\ \Rightarrow \cos\varphi &= \frac{1}{2} ( e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} ) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} z - z^* &= |z| \cdot ( e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} ) = 2i \operatorname{Im}(z) = 2iy = 2|z|i\sin\varphi \\ \Rightarrow \sin\varphi &= \frac{1}{2i} ( e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} ) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aus (1.10) folgt:  $|e^{i\varphi}| = \sqrt{e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi}} = \sqrt{e^0} = 1$ ; die komplexen Zahlen  $e^{i\varphi}$  liegen demnach auf dem Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene.

Für spätere Berechnungen seien schließlich noch die Beziehungen

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} = i \quad (2.8)$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i = \frac{1}{i}$$

genannt.

### 3 HARMONISCHE SCHWINGUNGEN

"Wenn man eine gleichförmige Kreisbewegung 'von der Seite betrachtet', d.h. sie auf eine Gerade (...) projiziert, die in der Kreisbahnebene liegt, so erhält man eine harmonische Schwingung."<sup>3</sup>

Dieser der Physik entnommenen Definition einer harmonischen Schwingung entspricht die mathematische Betrachtung eines Vektors ( oder Zeigers ) vom Betrag  $S$ , der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Ursprung eines Koordinatensystems rotiert. Die Projektion der Spitze des Vektors auf eine der beiden Koordinatenachsen führt dann eine Sinusschwingung aus. Für die Winkelgeschwindigkeit oder auch Kreisfrequenz gilt:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2\pi \cdot f = \text{const.} , \quad (3.1)$$

wenn man  $T$  als Perioden- oder Schwingungsdauer und deren Reziprokwert als Frequenz  $f$  definiert. Nach (3.1) kann der zeitabhängige Winkel des ( im mathematisch positiven Sinn ) rotierenden Vektors gegen die  $x$ -Achse durch die Proportionalitätskonstante  $\omega$  ausgedrückt werden:  $\varphi = \omega t$  .

Setzt man außerdem voraus, daß der Zeiger zur Zeit  $t = 0$  den Nullphasenwinkel  $\varepsilon$  ( auch Phasenverschiebung genannt ) gegen die  $x$ -Achse einnehmen soll, so folgt

$$\varphi = \omega t + \varepsilon . \quad (3.2)$$

$\varphi$  wird in diesem Zusammenhang auch Phase genannt.

#### 3.1 ZEIGERDARSTELLUNG HARMONISCHER SCHWINGUNGEN

Gemäß Abb.3 wird die Projektion der Zeigerdrehung auf die  $y$ -Achse durch die Gleichung

$$y(t) = S \cdot \sin\varphi = S \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (3.3)$$

beschrieben.

---

<sup>3</sup>Zitat aus: Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik; Berlin 1977, S.14

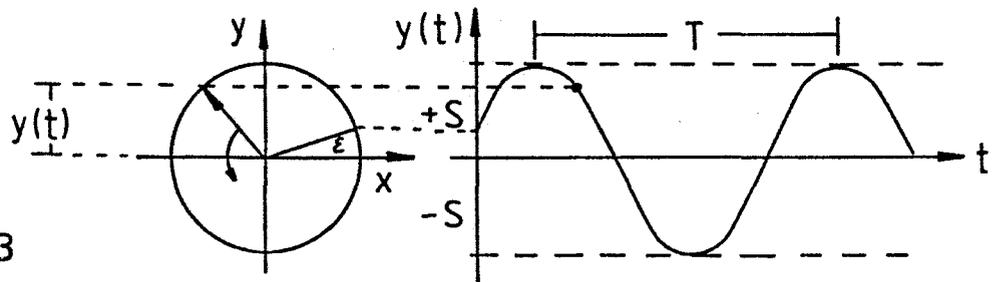


Abb. 3

Der maximale Betrag von  $y(t)$ , welcher mit der Zeigerlänge  $S$  identisch ist, heißt Amplitude. Geschwindigkeit und Beschleunigung der projizierten Bewegung errechnet sich folgendermaßen:

$$v(t) = y'(t) = S\omega \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (3.4)$$

$$a(t) = y''(t) = -S\omega^2 \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (3.5)$$

### 3.2 KOMPLEXE DARSTELLUNG EINER HARMONISCHEN SCHWINGUNG

Läßt man einen komplexen Vektor<sup>4</sup>  $\underline{r}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene rotieren, und projiziert seine Spitze auf die beiden Koordinatenachsen, so entstehen zwei Systeme harmonischer Schwingungen: eine Sinusschwingung bei der Projektion auf die Imaginärachse und die dazugehörige Cosinusschwingung bei der Projektion auf die reelle Achse (vgl. Abb. 4).

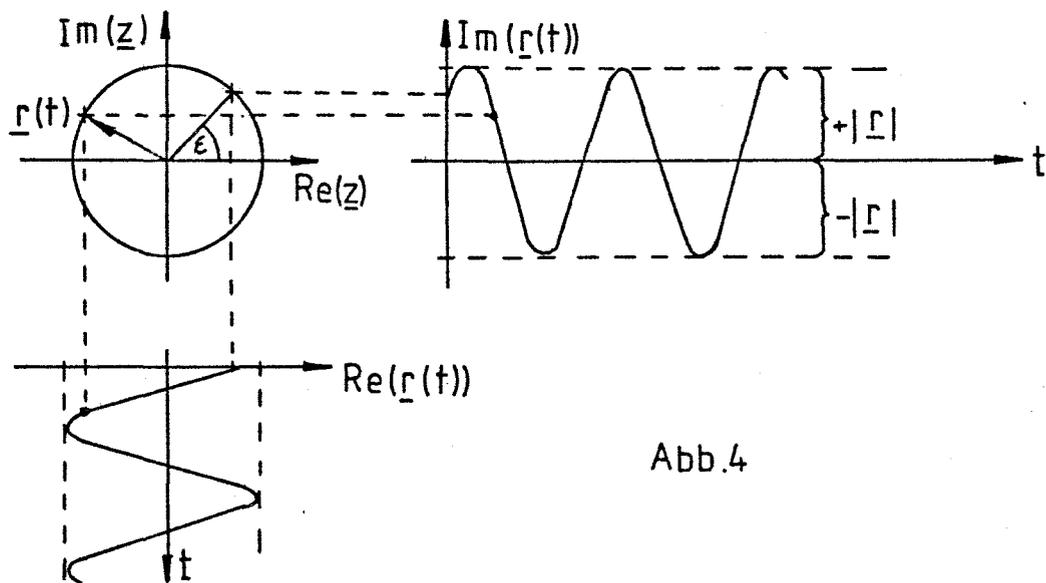


Abb. 4

<sup>4</sup>Um Mißverständnisse auszuschließen, werden im folgenden komplexe Größen durch Unterstreichung gekennzeichnet, wie es auch in der weiterführenden Literatur üblich ist.

Die komplexe Zahl  $\underline{r}$  setzt sich aus ihren zeitabhängigen Komponenten zusammen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\underline{r}(t)) &= |\underline{r}| \cdot \cos\varphi \\ \operatorname{Im}(\underline{r}(t)) &= |\underline{r}| \cdot \sin\varphi\end{aligned}\quad (3.6)$$

Somit kann man Sinus- und Cosinusschwingung des rotierenden Zeigers durch Linearkombination seiner zeitabhängigen Komponenten zu den komplexen Funktionen nach der Zeit

$$\underline{r}(t) = \operatorname{Re}(\underline{r}(t)) + i \cdot \operatorname{Im}(\underline{r}(t)) = |\underline{r}| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad (3.7)$$

zusammenfassen; nach (2.4) läßt sich mithin schreiben:

$$\underline{r}(t) = |\underline{r}| \cdot e^{i\varphi} = |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \varepsilon)} \quad (3.8)$$

Ebenso gebräuchlich ist die äquivalente Form

$$\underline{r}(t) = |\underline{r}| \cdot e^{i\varepsilon} \cdot e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

der komplexen Schwingungsfunktion; das Produkt  $|\underline{r}| \cdot e^{i\varepsilon}$  heißt *komplexe Amplitude* der Schwingung.

Der Vorteil dieser komplexen Schreibweise beruht einerseits darauf, daß mit der Funktion  $\underline{r}(t)$  im Gegensatz zur reellen Funktion  $y(t)$  aus Abschnitt 3.1 die Kreisbahn eines Punktes  $\underline{r}$  in der Ebene beschrieben wird; andererseits werden viele Rechnungen (v.a. in der Schwingungsphysik) dadurch vereinfacht, indem man sie nicht mit Sinus- und Cosinusfunktionen, sondern mit der komplexen Schwingungsfunktion durchführt; erst am Ende solcher Berechnungen bestimmt man Real- und Imaginärteil, da diese allein physikalische Bedeutung haben.

### 3.21 DIFFERENTIATION UND INTEGRATION DER KOMPLEXEN SCHWINGUNGSFUNKTION

Die Ableitungsregeln reeller Funktionen<sup>5</sup> lassen sich auch auf die komplexe Funktion  $\underline{z}(t) = x(t) + iy(t)$  mit den zeitabhängigen Parametern  $x(t)$  und  $y(t)$  übertragen.

---

<sup>5</sup> insbesondere  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  und  $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

Folglich wird eine komplexe Funktion differenziert, indem man Real- und Imaginärteil nach der Veränderlichen ableitet:

$$\underline{z}'(t) = x'(t) + iy'(t) .$$

Damit lautet die Ableitung der komplexen Schwingungsfunktion nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \underline{z}'(t) &= |\underline{r}| \cos' \varphi + i |\underline{r}| \sin' \varphi = \\ &= |\underline{r}| ( \cos'(\omega t + \varepsilon) + i \sin'(\omega t + \varepsilon) ) = \\ &= |\underline{r}| ( -\omega \sin(\omega t + \varepsilon) + i \omega \cos(\omega t + \varepsilon) ) = \\ &= |\underline{r}| ( i^2 \omega \sin(\omega t + \varepsilon) + i \omega \cos(\omega t + \varepsilon) ) = \\ &= i \omega \cdot |\underline{r}| ( \cos(\omega t + \varepsilon) + i \sin(\omega t + \varepsilon) ) . \end{aligned}$$

Zu selbigem Ergebnis kommt man auch einfacher, indem man die Exponentialform heranzieht:

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \varepsilon)} \\ \rightarrow \underline{z}'(t) &= i \omega |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \varepsilon)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der Faktor  $i$  läßt sich mit der Beziehung (2.8) in den Exponenten aufnehmen und erhöht den Nullphasenwinkel der ursprünglichen Funktion um  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\underline{z}'(t) = \omega |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \varepsilon + \frac{\pi}{2})}$$

Die Integration komplexer Funktionen verläuft analog: man integriert Real- und Imaginärteil.

$$\int \underline{z}(t) dt = \int x(t) dt + i \int y(t) dt$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int \underline{z}(t) dt &= \int |\underline{r}| \cos(\omega t + \varepsilon) dt + i \int |\underline{r}| \sin(\omega t + \varepsilon) dt = \\ &= |\underline{r}| \cdot \frac{\sin(\omega t + \varepsilon)}{\omega} + i |\underline{r}| \cdot \frac{-\cos(\omega t + \varepsilon)}{\omega} = \\ &= \frac{1}{i \omega} \cdot |\underline{r}| ( \cos(\omega t + \varepsilon) + i \sin(\omega t + \varepsilon) ) \end{aligned}$$

Auch hier wird der Vorteil der exponentiellen Schreibweise deutlich:

$$\int \underline{r}(t) dt = \int |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \epsilon)} dt = \frac{1}{i\omega} \cdot |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \epsilon)} \quad (3.11)$$

Wie bei der Ableitung lässt sich nach (2.8) der Faktor  $\frac{1}{i}$  in den Exponenten aufnehmen:

$$\int \underline{r}(t) dt = \frac{1}{\omega} \cdot |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \epsilon - \frac{\pi}{2})}$$

Der ursprüngliche Nullphasenwinkel verringert sich um  $\frac{\pi}{2}$ .

Die Ergebnisse dieses Abschnittes können auf folgende kurze Formel gebracht werden:

Satz 1 : *Differentiation* der komplexen Schwingungsfunktion bedeutet *Multiplikation* mit  $i\omega$ , *Integration* Division durch  $i\omega$ .

### 3.2.2 GESCHWINDIGKEIT UND BESCHLEUNIGUNG DER SCHWINGUNG IM KOMPLEXEN

Leitet man den Ortsvektor des Punktes  $\underline{r}$  nach der Zeit ab, dann erhält man den komplexen Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v}(t) = \underline{r}'(t) = \omega |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \epsilon + \frac{\pi}{2})} \quad (3.12)$$

mit

$$\text{Re}(\underline{v}(t)) = \omega |\underline{r}| \cos(\omega t + \epsilon + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Im}(\underline{v}(t)) = \omega |\underline{r}| \sin(\omega t + \epsilon + \frac{\pi}{2})$$

und für den Beschleunigungsvektor

$$\underline{a}(t) = \underline{r}''(t) = -\omega^2 |\underline{r}| \cdot e^{i(\omega t + \epsilon)} \quad (3.13)$$

mit

$$\text{Re}(\underline{a}(t)) = -\omega^2 |\underline{r}| \cos(\omega t + \epsilon)$$

$$\text{Im}(\underline{a}(t)) = -\omega^2 |\underline{r}| \sin(\omega t + \epsilon)$$

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor rotieren demnach auch mit der gleichen Kreisfrequenz  $\omega$  und projizieren ebenfalls harmonische Schwingungsbewegungen, allerdings mit den Amplituden  $\omega|\underline{r}|$  bzw.  $-\omega^2|\underline{r}|$ .

Es ist unschwer zu erkennen, daß im Rückblick auf die reelle Funktion  $y(t)$  aus Kapitel 3.1 mit  $s = |\underline{r}|$  resultiert:

$$\text{Im}(\underline{r}(t)) = y(t) \quad , \quad \text{Im}(\underline{v}(t)) = y'(t) \quad \text{und} \quad \text{Im}(\underline{a}(t)) = y''(t) \quad .$$

Anders ausgedrückt: Die Imaginärteile der Gleichungen (3.8) , (3.12) und (3.13) ergeben die Gleichungen (3.3) , (3.4) und (3.5).

### 3.3 REELLE SCHWINGUNGSFUNKTIONEN IN KONJUGIERT KOMPLEXER

#### DARSTELLUNG

In Abb.5 sind zwei konjugiert komplexe umlaufende Zeiger veranschaulicht. Da sie zueinander konjugiert sind, rotieren sie mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit.



Abb.5

Für den Summenvektor erhält man nach (2.6)

$$\underline{z} + \underline{z}^* = |\underline{z}| \cdot ( e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} ) = 2|\underline{z}|\cos\varphi$$

Die Summe der beiden umlaufenden Zeiger ändert sich also für konstante Umlaufgeschwindigkeit gemäß der Cosinusfunktion.

Entsprechend verläuft die Differenz der beiden konjugiert komplexen Zeiger zeitlich sinusförmig:

$$\underline{z} - \underline{z}^* = |\underline{z}| \cdot ( e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} ) = 2i|\underline{z}|\sin\varphi$$

Umgekehrt kann man nach (2.6) jede reelle Cosinusschwingung durch Paare zueinander konjugiert komplexer Schwingungsfunktionen darstellen:

$$C \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) = \frac{C}{2} e^{i(\omega t + \varepsilon)} + \frac{C}{2} e^{-i(\omega t + \varepsilon)}$$

Definiert man die zeitunabhängige komplexe Zahl  $\underline{c} := \frac{C}{2} e^{i\varepsilon}$  so läßt sich umformen:

$$C \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) = \underline{c} \cdot e^{i\omega t} + \underline{c}^* \cdot e^{-i\omega t}, \quad (3.14)$$

wobei  $C = 2|\underline{c}|$  und  $\tan\varepsilon = \frac{\operatorname{Im}(\underline{c})}{\operatorname{Re}(\underline{c})}$  (3.15)<sup>6</sup>

Analog gilt für die Sinusschwingung:

$$\begin{aligned} S \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) &= S \cdot \cos(\omega t + \varepsilon - \frac{\pi}{2}) = \\ &= \frac{S}{2} e^{i(\omega t + \varepsilon - \frac{\pi}{2})} + \frac{S}{2} e^{-i(\omega t + \varepsilon - \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

Entsprechend wird hier  $\underline{s} := \frac{S}{2} e^{i(\varepsilon - \frac{\pi}{2})}$  gesetzt und es folgt:

$$S \cdot \sin(\omega t + \varepsilon) = \underline{s} \cdot e^{i\omega t} + \underline{s}^* \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.16)$$

mit  $S = 2|\underline{s}|$  und  $\tan\varepsilon = -\frac{\operatorname{Im}(\underline{s})}{\operatorname{Re}(\underline{s})}$  (3.17)

Die komplexe Darstellung reeller Schwingungsfunktionen erweist sich insbesondere dann als zweckmäßig, wenn diese innerhalb einer Rechnung multipliziert werden müssen.

---

<sup>6</sup>folgt aus  $\frac{\operatorname{Re}(\underline{c})}{\operatorname{Im}(\underline{c})} = \frac{|\underline{c}| \cdot \cos\varepsilon}{|\underline{c}| \cdot \sin\varepsilon} = \frac{1}{\tan\varepsilon}$  ; (3.17) analog

Dazu ein Beispiel aus der Praxis:

In einer elektrischen Schaltung herrscht zwischen Quelle und Verbraucher die Wechselspannung  $U(t) = \sqrt{2} \cdot U_0 \cos(\omega t + \delta)$ ; zum Verbraucher fließt der Wechselstrom  $I(t) = \sqrt{2} \cdot I_0 \cos(\omega t + \psi)$ . Gesucht ist der Augenblickswert der vom Verbraucher aufgenommenen Leistung  $P(t)$ .

Lösung: Es gilt:  $P(t) = U(t) \cdot I(t)$

Mit (3.14) lässt sich umformen:

$$U(t) = \underline{U} \cdot e^{i\omega t} + \underline{U}^* \cdot e^{-i\omega t}, \quad \text{wobei } \underline{U} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot U_0 e^{i\delta}$$

$$I(t) = \underline{I} \cdot e^{i\omega t} + \underline{I}^* \cdot e^{-i\omega t}, \quad \text{wobei } \underline{I} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot I_0 e^{i\psi}$$

Damit ist die Momentanleistung

$$P(t) = ( \underline{U} \cdot \underline{I} \cdot e^{i2\omega t} + \underline{U}^* \cdot \underline{I}^* \cdot e^{-2i\omega t} ) + ( \underline{U} \cdot \underline{I}^* + \underline{U}^* \cdot \underline{I} )$$

Beziehung (3.15) ermöglicht Rückführung in die reelle Schreibweise:

$$P(t) = U_0 I_0 \cos(2\omega t + \delta + \psi) + U_0 I_0 \cos(\delta - \psi) =$$

$$= \text{ " Wechselleistung " } + \text{ " Wirkleistung " }$$

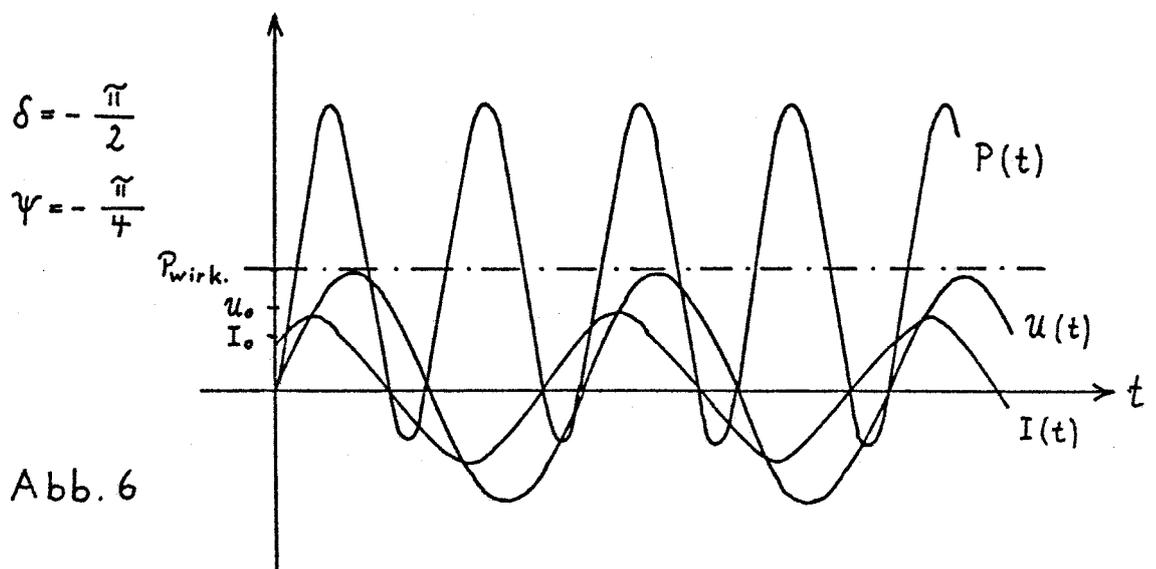


Abb. 6

### 3.4 ÜBERLAGERUNG HARMONISCHER SCHWINGUNGEN

Entsprechend zum reellen Zahlenbereich, wo Schwingungen überlagert werden, indem man sie addiert, geht im Komplexen die Schwingungsüberlagerung, auch *Superposition* genannt, aus der Vektoraddition der komplexen Zeiger hervor.

#### 3.4.1 ÜBERLAGERUNG HARMONISCHER SCHWINGUNGEN GLEICHER FREQUENZ

In der Gaußschen Zahlenebene rotieren zwei komplexe Zeiger  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  mit gleicher Frequenz (Abb.7). Zu jedem Zeitpunkt schließen die beiden Zeiger einen starren Winkel ein, welcher der Differenz ihrer Nullphasenwinkel gleich ist.

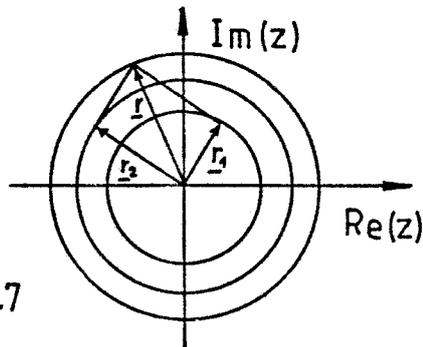


Abb.7

$$\underline{r}_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \varepsilon_1)} \quad ; \quad A_1 = |\underline{r}_1|$$

$$\underline{r}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \varepsilon_2)} \quad ; \quad A_2 = |\underline{r}_2|$$

$$\underline{r}(t) = A e^{i(\omega t + \varepsilon)} \quad ; \quad A = |\underline{r}|$$

Die Vektoraddition von  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  ergibt den Zeiger  $\underline{r}$ . Da  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  gleichfrequent rotieren, dreht sich auch das von ihnen aufgespannte Parallelogramm mit derselben Winkelgeschwindigkeit und ändert seine Gestalt nicht. Daraus kann man folgern, daß  $\underline{r}_1$ ,  $\underline{r}_2$  und der aus der Schwingungsüberlagerung resultierende Zeiger  $\underline{r}$  gleiche Winkelgeschwindigkeit und somit auch gleiche Frequenz haben.

Dies läßt sich auch rechnerisch nachweisen:

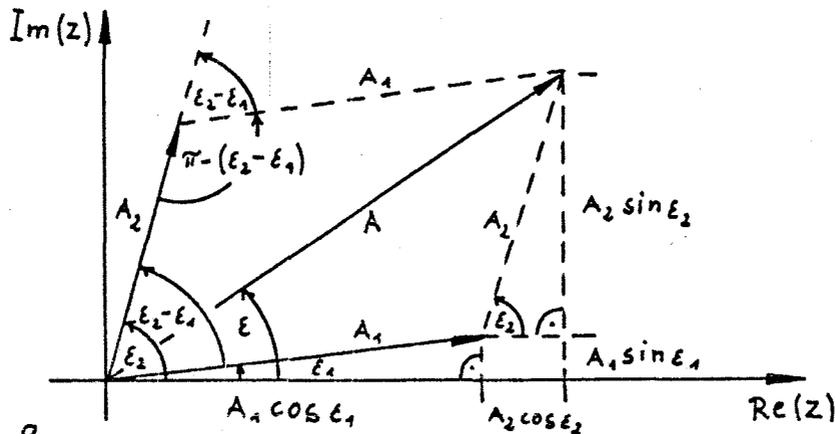
$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t) = (A_1 \cdot e^{i\varepsilon_1} + A_2 \cdot e^{i\varepsilon_2}) \cdot e^{i\omega t} \\ \underline{r}(t) &= A \cdot e^{i\varepsilon} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\underline{r}$  ist also betragsmäßig gleich der Summe der komplexen Amplituden von  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  und rotiert mit gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Damit wird folgender Satz evident:

**Satz 2 :** Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen beliebiger Amplituden und Phasen aber gleicher Frequenz ergibt stets wieder eine harmonische Schwingung derselben Frequenz.

Amplitude  $A$  und Nullphasenwinkel  $\varepsilon$  der entstandenen Schwingung erhält man durch Betrachtung der Zeiger zum Zeitpunkt  $t = 0$  :



$$\underline{x}_1(0) = A_1 e^{i\varepsilon_1}$$

$$\underline{x}_2(0) = A_2 e^{i\varepsilon_2}$$

$$\underline{x}(0) = A e^{i\varepsilon}$$

Abb. 8

Nach dem Cosinussatz gilt:  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1))$

Damit beträgt die gesuchte Amplitude:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \quad (3.19)$$

Aus Abb.8 geht außerdem die Beziehung für den Nullphasenwinkel der Überlagerungsschwingung hervor:

$$\tan \varepsilon = \frac{A_1 \sin \varepsilon_1 + A_2 \sin \varepsilon_2}{A_1 \cos \varepsilon_1 + A_2 \cos \varepsilon_2} \quad (3.20)$$

Beispiel:

Gesucht ist die Summenschwingung  $P \cdot \cos(t + \psi)$  der beiden reellen Funktionen  $f(t) = 3 \cdot \sin(t + \frac{\pi}{6})$  und  $g(t) = 5 \cdot \cos(t + \frac{\pi}{4})$ .

Lösung:

$$f(t) = 3 \cdot \sin(t + \frac{\pi}{6}) = 3 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - t - \frac{\pi}{6}) = 3 \cdot \cos(t - \frac{\pi}{3})$$

$$g(t) = 5 \cdot \cos(t + \frac{\pi}{4})$$

$$f(t) = \operatorname{Re}(\underline{f}(t)) \quad \text{mit} \quad \underline{f}(t) = 3 \cdot e^{i(t - \frac{\pi}{3})}$$

$$g(t) = \operatorname{Re}(\underline{g}(t)) \quad \text{mit} \quad \underline{g}(t) = 5 \cdot e^{i(t + \frac{\pi}{4})}$$

$$\underline{f}(t) + \underline{g}(t) = (3 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{3})} + 5 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}) \cdot e^{it}$$

$$P = \sqrt{3^2 + 5^2 + 30 \cdot \cos(\frac{7}{12} \pi)} \approx 5,1 ;$$

$$\tan \psi = \frac{3 \cdot \sin(-\frac{\pi}{3}) + 5 \cdot \sin(\frac{\pi}{4})}{3 \cdot \cos(-\frac{\pi}{3}) + 5 \cdot \cos(\frac{\pi}{4})} \approx 0,186 \Rightarrow \psi \approx \frac{\pi}{18} ;$$

Die gesuchte Summenschwingung lautet:  $5,1 \cdot \cos(t + \frac{\pi}{18})$ .

Folgende zwei Spezialfälle der Überlagerung sind schließlich noch erwähnenswert:

- Die beiden Zeiger haben gleiche Nullphasenwinkel:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow A = A_1 + A_2 \quad \wedge \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

(größtmögliche Amplitude bei variablen Nullphasenwinkeln)

- Die beiden Zeiger haben entgegengesetzte Richtungen:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = z \cdot \pi ; \quad z \in \mathbb{Z}, \quad z \neq 0 \quad \text{und ungerade} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = |A_1 - A_2| \quad \wedge \quad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & , \text{wenn } A_1 > A_2 \\ \varepsilon_2 & , \text{wenn } A_1 < A_2 \end{cases}$$

(minimale Amplitude bei festen  $A_1$  und  $A_2$  mit variablen Nullphasenwinkeln)

### 3.4.2 ÜBERLAGERUNG HARMONISCHER SCHWINGUNGEN VERSCHIEDENER FREQUENZ

Die Überlagerung verschiedenfrequenter Schwingungen bedeutet in der komplexen Zahlenebene Vektoraddition unterschiedlich schnell rotierender Zeiger. In Abb.9 werden die Zeiger  $\underline{r}_1$  und  $\underline{r}_2$  vektoriell addiert, indem man den Anfangspunkt von  $\underline{r}_2$  auf die Spitze von  $\underline{r}_1$  legt.

Der Summenvektor  $\underline{r}$  verbindet Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors. Die beiden Teilvektoren rotieren jetzt aber mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit; infolge dessen verändert sich auch die Gestalt des Vektordreiecks ständig. Die Länge des Summenvektors  $\underline{r}$  ist folglich eine Funktion der Zeit.

Bei der rechnerischen Behandlung des Problems setzt man der Einfachheit halber  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  und bringt die Vektorsumme auf eine der Gleichung (3.18) entsprechende Form:

$$\underline{r}(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} ; \quad (3.21)$$

$$\underline{r}(t) = A_1 e^{i\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t} + A_2 e^{i\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t} ;$$

$$\underline{r}(t) = \left[ A_1 e^{i\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t} + A_2 e^{i\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t} \right] \cdot e^{i\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t} ;$$

$$\underline{r}(t) = A(t) \cdot e^{i \cdot \varepsilon(t)} \cdot e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} = A(t) \cdot e^{i\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varepsilon(t)\right)} ;$$

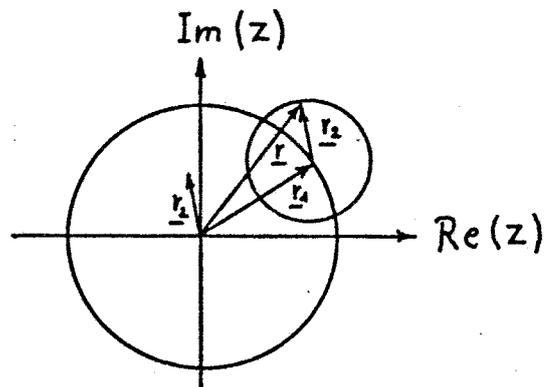


Abb.9

Damit folgt für die zeitabhängigen Parameter des Summenvektors:

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t)} \quad (3.22)$$

$$\tan(\varepsilon(t)) = \frac{A_1 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + A_2 \sin\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}{A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) + A_2 \cos\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}$$

$$\Rightarrow \tan(\varepsilon(t)) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \cdot \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (3.23)$$

Auch wenn diese Darstellung komplizierter ist als die Ausgangsgleichung, so läßt sich dennoch mit ihrer Hilfe eine technisch besonders interessante Klasse von überlagerten Schwingungen, die Schwebungen, anschaulich deuten.

### 3.4.3 SCHWEBUNGEN

Schwebungen entstehen durch Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen, deren Kreisfrequenzen *benachbart*, d.h. betragsmäßig nahezu gleich, sind. Nach (3.21) ist der Summenvektor

$$\underline{r}(t) = A(t) \cdot e^{i\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varepsilon(t)\right)}$$

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ( mit  $\omega_1 > \omega_2$  ) benachbart, dann besteht zwischen ihnen die Beziehung

$$\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$$

Die Parameter  $A(t)$  und  $\varepsilon(t)$ , deren Beträge aus der Differenz der Kreisfrequenzen hervorgehen (s. (3.22) u. (3.23)), ändern

sich also nur langsam gegenüber dem Winkel  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$  im Argument der Exponentialfunktion.

Anschaulich entstehen Schwebungen also aus einem Zeiger  $\underline{r}(t)$ , der annähernd mit der Kreisfrequenz  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  rotiert und dessen Länge sich erst über mehrere Umläufe hinweg merklich verändert. Die Projektion derartiger Zeiger ergibt demzufolge Schwingungen mit langsam an- und abschwellender Amplitude (s. Abb. 10); diese wird durch Gleichung (3.22) beschrieben und liegt gemäß dem Wertebereich der Cosinusfunktion im Intervall

$$|A_1 - A_2| \leq A(t) \leq A_1 + A_2 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \text{denn } A_{\max}(t) &= A_1 + A_2 \quad \text{für } (\omega_1 - \omega_2) \cdot t = z \cdot 2\pi \\ A_{\min}(t) &= |A_1 - A_2| \quad \text{für } (\omega_1 - \omega_2) \cdot t = z \cdot 2\pi + \pi \end{aligned} \quad z \in \mathbb{Z}$$

Dies bestätigen auch die Spezialfälle aus Kapitel 3.4.1. Die Gleichung (3.22) stellt somit die Hüllkurve der Summen- oder Hauptschwingung dar.

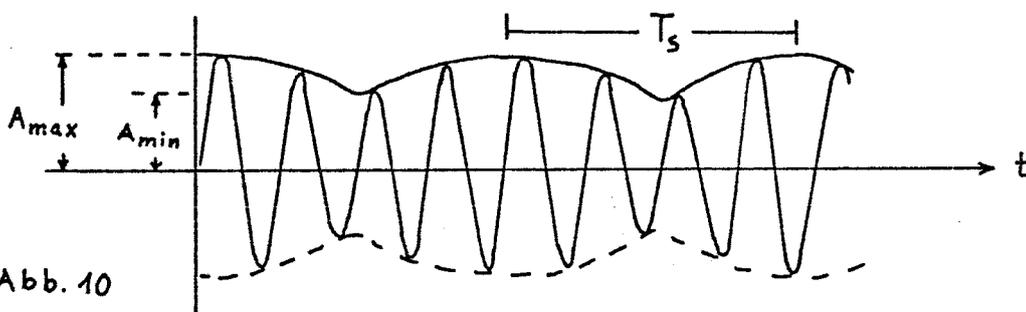


Abb. 10

Da  $A(t)$  für die Zeiten  $t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \cdot z$ ;  $z \in \mathbb{Z}$  maximal wird, vergeht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima der Hüllkurve die Schwebungsdauer

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \quad (3.25)$$

$$\rightarrow f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2 \quad (3.26)$$

Die Differenz  $f_1 - f_2$  (mit  $f_1 > f_2$ ) gibt also -auf das Zeigerdiagramm angewandt-an, wie oft pro Zeiteinheit  $A(t)$  maximal ist, d.h. wie oft der schneller rotierende Zeiger den langsameren überholt.

Schwebungen werden auch als *modulierte Schwingungen* bezeichnet. Ihre Kreisfrequenz, die sogenannte *Trägerfrequenz*, schwankt geringfügig um den Mittelwert  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  und ihre Amplitude ist mit der *Modulationsfrequenz*  $\omega_1 - \omega_2$  moduliert.

Eine spezielle Gruppe unter den Schwebungen sind die vollkommenen Schwebungen; sie entstehen durch Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen aber gleichen Amplituden ( $A_1 = A_2$ ) und Nullphasenwinkeln. Setzt man wie in (3.21) an, dann ist

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= A_1 e^{i\omega_1 t} + A_1 e^{i\omega_2 t} ; \\ \underline{r}(t) &= A_1 e^{i\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t} + A_1 e^{i\left(-\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t} ; \\ \underline{r}(t) &= A_1 \cdot \left[ e^{i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} + e^{-i\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t} \right] \cdot e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} ; \\ \underline{r}(t) &= 2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot e^{i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t} \quad (3.27) \end{aligned}$$

Die Hüllkurve der vollkommenen Schwebung ergibt wieder eine harmonische Schwingung  $2A_1 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$ , in deren Extrema sich die Amplituden addieren (*konstruktive Interferenz*) und in deren Nullstellen sich die Amplituden vollständig auslöschen (*destruktive Interferenz*).

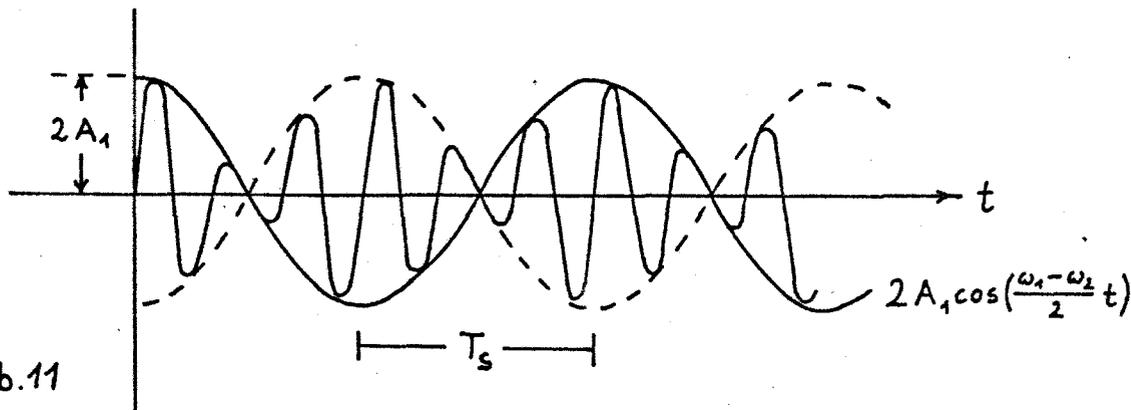


Abb. 11

Beispiel:

Aus zwei harmonischen Schwingungen soll durch Überlagerung eine Schwebung mit der Trägerfrequenz  $f_T = 2,5 \text{ s}^{-1}$  erzeugt werden; die Amplitude der Schwebung schwankt zwischen 1 und 3 und ist mit der Modulationsfrequenz  $f_m = 0,5 \text{ s}^{-1}$  moduliert. Um welche zwei harmonischen Schwingungen handelt es sich ?

Lösung:

$$f_m = 0,5 \text{ s}^{-1} \quad \rightarrow \quad \omega_m = 2\pi \cdot f_m = 3,1 \text{ s}^{-1}$$

$$f_T = 2,5 \text{ s}^{-1} \quad \rightarrow \quad \omega_T = 2\pi \cdot f_T = 15,7 \text{ s}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } \omega_m = \omega_1 - \omega_2 = 3,1 \text{ s}^{-1} \\ \text{II) } \omega_T = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 15,7 \text{ s}^{-1} \end{array} \right\} \rightarrow \omega_1 = 17,25 \text{ s}^{-1}; \omega_2 = 14,15 \text{ s}^{-1}$$

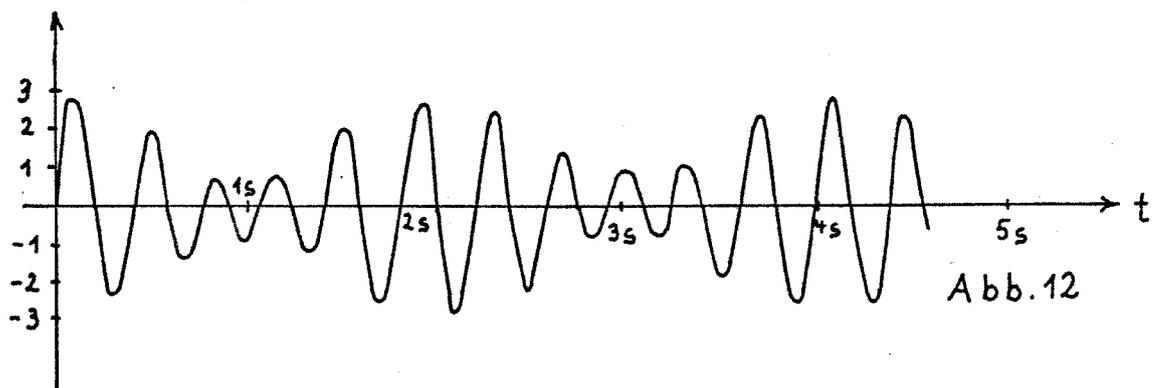
$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } A_1 + A_2 = 3 \\ \text{II) } |A_1 - A_2| = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{1. Fall: } A_1 = 2 ; A_2 = 1 \quad \text{für } A_1 > A_2 \\ \text{2. Fall: } A_1 = 1 ; A_2 = 2 \quad \text{für } A_1 < A_2 \end{array}$$

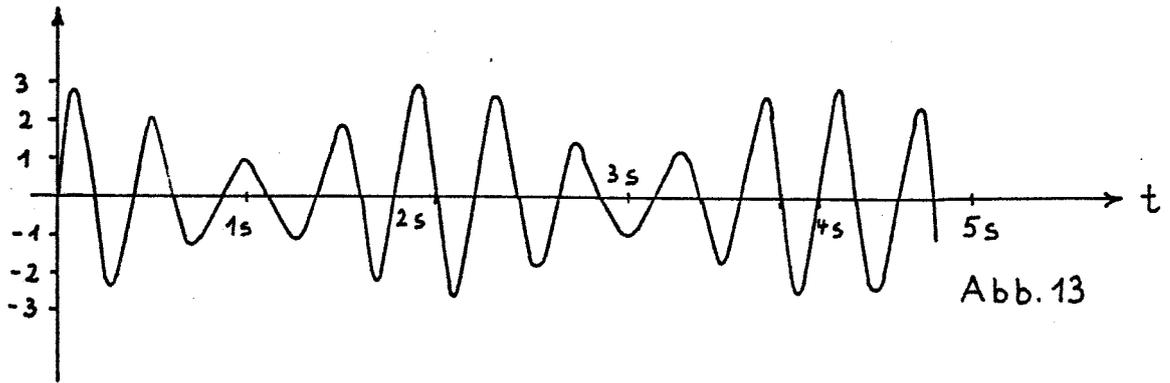
Die Schwebung kann also durch folgende zwei Überlagerungen erzeugt werden:

$$2 \cdot \sin(17,25 \text{ s}^{-1} \cdot t) + \sin(14,15 \text{ s}^{-1} \cdot t) \quad \text{s. Abb.12}$$

oder

$$\sin(17,25 \text{ s}^{-1} \cdot t) + 2 \cdot \sin(14,15 \text{ s}^{-1} \cdot t) \quad \text{s. Abb.13}$$





#### 4 PERIODISCHE SCHWINGUNGEN

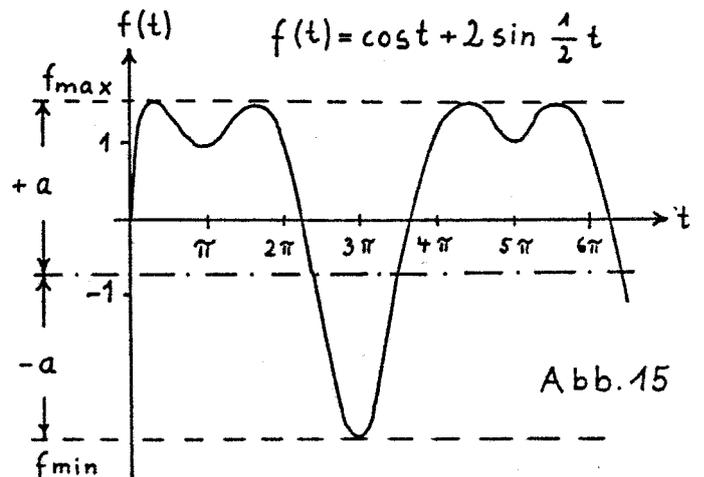
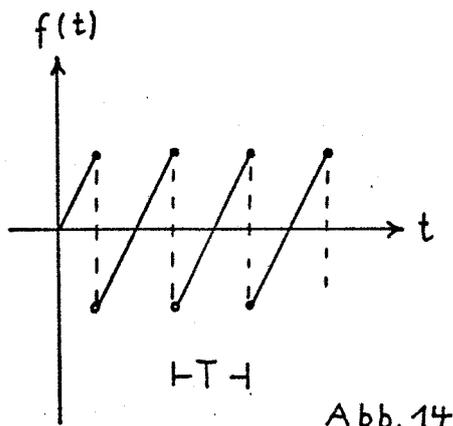
Schwingungsfunktionen, deren Verlauf sich nach einer gewissen Zeit  $T$  (exakt) wiederholt, heißen periodische Schwingungen. Für derartige periodische Schwingungen gilt folglich die Beziehung

$$f(t) = f(t + T) \quad , \quad (4.1)$$

welche besagt, daß die Schwingungsfunktion  $f$  zu zwei beliebigen Zeitpunkten, zwischen denen die Zeit  $T$  vergeht, den gleichen Wert annimmt. Wie bei den harmonischen Schwingungen spricht man auch hier von der Periodendauer  $T$  und der Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Ihre Amplitude ist der halbe Abstand zwischen maximalem und minimalem Funktionswert, also

$$a = \frac{1}{2} (f_{\max} - f_{\min}) \quad . \quad (4.2)$$

Periodische Schwingungen haben beispielsweise die Gestalt von Sägezahn-schwingungen (Abb.14), sie entstehen aber auch durch Überlagerung verschiedenfrequenter harmonischer Schwingungen ungleicher Amplituden (Abb.15).



#### 4.1 FOURIERANALYSE PERIODISCHER SCHWINGUNGEN

Abb.15 zeigt, wie eine periodische Schwingung durch Überlagerung zweier gegebener Sinusschwingungen erzeugt wird. Jean Bapiste Fourier stellte (neben Euler) umgekehrt die Frage, welche Sinusschwingungen für die Erzeugung einer gegebenen periodischen Schwingung überlagert werden müssen. Der nach ihm benannte Satz besagt, daß sich jeder periodische Vorgang der Periodendauer  $T$  in eine -im allgemeinen unendliche- Summe von harmonischen Teilschwingungen zerlegen läßt, deren Kreisfrequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  sind:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos\omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots \\ &\quad + b_1 \sin\omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ( a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t ) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Der Summand mit der Kreisfrequenz  $\omega$  heißt *Grundschwingung*, die übrigen mit ganzzahligen Vielfachen von  $\omega$  werden *Oberschwingungen* genannt. Das mathematische Problem, zu dessen Lösung die komplexen Zahlen ein hilfreiches Instrument sind, besteht nun darin, die *Fourierkoeffizienten*, d.h. geeignete Amplituden  $a_n$  und  $b_n$ , zu finden, durch welche  $f(t)$  erzeugt wird.

Mit den Gleichungen (2.6) und (2.7) kann der allgemeine Summand von (4.3) in die komplexe Schreibweise übergeführt werden:

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t &= \\ &= a_n \cdot \frac{1}{2} ( e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} ) + b_n \cdot \frac{1}{2i} ( e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} ) = \\ &= \frac{1}{2} ( a_n - ib_n ) \cdot e^{in\omega t} + \frac{1}{2} ( a_n + ib_n ) \cdot e^{-in\omega t} \end{aligned}$$

Definiert man anschließend die komplexe Zahl

$$\underline{c}_n := \begin{cases} a_0 & \text{für } n = 0 \quad \text{mit } \underline{c}_0^* := 0 \\ \frac{1}{2} ( a_n - ib_n ) & \text{für } n > 0 \end{cases} ,$$

wobei  $a_n = 2 \cdot \text{Re}(\underline{c}_n)$  und  $b_n = -2 \cdot \text{Im}(\underline{c}_n)$ , so ergibt sich die komplexe Form des allgemeinen Summanden:

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \underline{c}_n e^{in\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-in\omega t} \quad , \quad n \geq 0$$

Es handelt sich also wieder um ein Paar zueinander konjugiert komplexer Schwingungsfunktionen. Folglich kann man anstatt (4.3) auch

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} ( \underline{c}_n e^{in\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-in\omega t} ) \quad (4.4)$$

schreiben<sup>7</sup>. Die Unbekannten sind jetzt die komplexen Zahlen  $\underline{c}_n$  und heißen *komplexe Fourierkoeffizienten*.

Um diese zu bestimmen, greift man auf eine wichtige Beziehung, die sogenannten *Orthogonalitätsrelationen*,

$$\int_0^T e^{in\omega t} \cdot e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ T & \text{für } m = n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

zurück, wobei  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen sind.

---

<sup>7</sup>An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, daß es sich hier um eine reellwertige Summe handelt, da auf die reellwertigen Sinus- und Cosinusglieder nur die in Kapitel 3.3 beschriebene Umformung angewandt wurde !

Multipliziert man nämlich (4.4) mit  $e^{-im\omega t}$  und integriert anschließend über das Intervall  $[0; T]$  nach  $t$ , also

$$f(t) \cdot e^{-im\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} ( \underline{c}_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-in\omega t} e^{-im\omega t} )$$

und

$$\int_0^T f(t) \cdot e^{-im\omega t} dt = \int_0^T \left[ \sum_{n=0}^{\infty} ( \underline{c}_n e^{in\omega t} e^{-im\omega t} + \underline{c}_n^* e^{-in\omega t} e^{-im\omega t} ) \right] dt$$

so erhält man nach Umformung:

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \underline{c}_n \int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt + \underline{c}_n^* \int_0^T e^{-in\omega t} e^{-im\omega t} dt \right]$$

Da nach den Orthogonalitätsrelationen alle Integrale der rechten Seite dieser Gleichung für  $m \neq n$  gleich Null sind und nur derjenige Summand übrigbleibt, für den  $m = n$  gilt, verkürzt sich die unendliche Reihe zu

$$\int_0^T f(t) \cdot e^{-im\omega t} dt = \underline{c}_n \cdot T$$

Da ja  $m = n$  ist, sind die komplexen Fourierkoeffizienten mit der Gleichung

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt \quad ; \quad n \geq 0 \quad (4.5)$$

eindeutig bestimmbar.

Mit der Eulerschen Formel lässt sich das Integral (4.5) aufspalten, also

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(-n\omega t) dt + i \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(-n\omega t) dt$$

Unmittelbar aus der Definition von  $\underline{c}_n$  leiten sich die reellen Fourierkoeffizienten ab:

$$a_n = 2 \operatorname{Re}(\underline{c}_n)$$

$$\rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t dt \quad ; \quad n > 0} \quad (4.6)$$

analog

$$b_n = -2 \operatorname{Im}(\underline{c}_n)$$

$$\rightarrow \boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t dt \quad ; \quad n > 0} \quad (4.7)$$

Dabei ist laut Definition das Glied  $a_0 = \underline{c}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^0 dt$ ,

$$\text{also} \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad ; \quad n = 0} \quad (4.8)$$

offenbar identisch mit dem arithmetischen Mittelwert von  $f(t)$  während einer Periode.

#### 4.1.1 BEWEIS DER ORTHOGONALITÄTSRELATIONEN

Im Gegensatz zur reellen Schreibweise lassen sich die Orthogonalitätsrelationen im Komplexen schnell und anschaulich beweisen:

$$\text{Zu zeigen: wenn } m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_0^T e^{in\omega t} \cdot e^{-im\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ T & \text{für } m = n \end{cases}$$

1. Fall:

$$m = n \Rightarrow \int_0^T e^{im\omega t} \cdot e^{-im\omega t} dt = \int_0^T e^0 dt = \int_0^T 1 dt = T ; \text{ q.e.d.}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} m \neq n &\Rightarrow \int_0^T e^{in\omega t} \cdot e^{-im\omega t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \\ &= \left[ \frac{1}{i(n-m)\omega} e^{i(n-m)\omega t} \right]_0^T = \frac{1}{i(n-m)\omega} \left( e^{i(n-m)\omega T} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{i(n-m)\omega} \left( e^{i(n-m) \cdot 2\pi} - 1 \right) ; \end{aligned}$$

Da die Differenz  $n - m$  laut Voraussetzung wieder eine ganze Zahl ist, vereinfacht sich der Term zu

$$\frac{1}{i(n-m)\omega} (1 - 1) = 0 ; \text{ q.e.d.}$$

## 4.2 SÄTZE ZUR FOURIERANALYSE

Nicht nur die Funktion  $f(t)$ , sondern auch  $\sin n\omega t$  und  $\cos n\omega t$  sowie  $e^{-in\omega t}$  sind periodisch mit der Zeit  $T$ , denn

$$\sin(n\omega(t + T)) = \sin\left(n \frac{2\pi}{T} (t + T)\right) = \sin(n\omega t + 2\pi n) = \sin n\omega t$$

$$\cos(n\omega(t + T)) = \cos\left(n \frac{2\pi}{T} (t + T)\right) = \cos(n\omega t + 2\pi n) = \cos n\omega t$$

und

$$e^{-in\omega(t + T)} = e^{-in\omega t} \cdot e^{-in \frac{2\pi}{T} \cdot T} = e^{-in\omega t} .$$

Daraus folgt, daß auch die Integranden der Gleichungen (4.5) bis (4.8)  $T$ -periodisch sein müssen. Deshalb können auch die Integrale über ein beliebig liegendes Zeitintervall der Länge  $T$ , also von einem beliebigem Zeitpunkt  $t_0$  bis zu  $t_0 + T$  erstreckt werden, und sind demnach unabhängig von  $t_0$ . Besonders das Integrationsintervall  $-\frac{T}{2}$  bis  $+\frac{T}{2}$  bringt häufig Rechenvorteile. Schließlich seien noch folgende Sätze zur Fourieranalyse symmetrischer Funktionen erwähnt:

Satz 3 : Ist  $f(t)$  eine *gerade Funktion*, d.h. wenn  $f(t) = f(-t)$ , dann ist

$$b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \, dt \quad \text{für } n = 0$$

Begründung: Wenn  $f(t)$  gerade (d.h. achsensymmetrisch) ist, dann muß die Integrandenfunktion von Gleichung (4.7), die ja ein Produkt aus der geraden Funktion  $f(t)$  und der ungeraden Sinusfunktion darstellt, ihrerseits ungerade sein.

Wählt man das Integrationsintervall  $\left[ -\frac{T}{2} ; +\frac{T}{2} \right]$ , so hebt sich das Integral dieser ungeraden Funktion auf und sein Betrag ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  gleich Null. Indes ist das Produkt  $f(t)\cos n\omega t$ , also der Integrand von Gleichung (4.6), eine gerade Funktion; daraus folgt:

$$\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt = \int_{-T/2}^0 f(t)\cos n\omega t dt$$

also  $\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos n\omega t dt = 2 \cdot \int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt ; n \in \mathbb{N}$

Ferner gilt:

Satz 4 : Ist  $f(t)$  ungerade, d.h.  $f(-t) = -f(t)$ , so gilt:

$$a_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Die Begründung verläuft hier analog.

### 4.3 ANWENDUNG DER FOURIERANALYSE

#### 4.3.1 FOURIERANALYSE DES RECHTECKIMPULSES

Abb.16 stellt den Graphen eines Rechteckimpulses dar, der die Periodendauer  $T = 2\pi$  ( Einheit beispielsweise ms ) hat und durch die Funktionsgleichung

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für } t \in \left[ 0 ; +\frac{T}{2} \right] \\ -A & \text{für } t \in \left[ -\frac{T}{2} ; 0 \right] \end{cases}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  periodisch festgelegt ist.

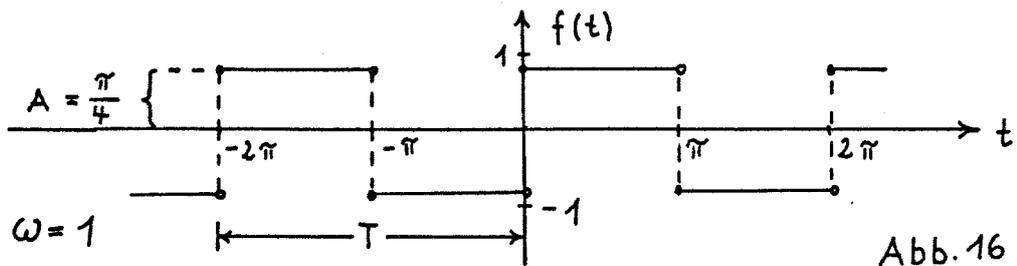


Abb.16

$f$  ist ungerade; deshalb können nach Satz 4 alle  $a_n$  gleich Null gesetzt werden. Gemäß dieses Satzes errechnen sich die übrigen Fourierkoeffizienten:

$$b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} A \sin n\omega t \, dt = \frac{4A}{T} \cdot \int_0^{T/2} \sin n\omega t \, dt = \frac{4A}{T} \left[ -\frac{\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{4 \cdot A}{n\omega T} \cdot (-\cos n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} + 1) = \frac{2A}{n\pi} \cdot (-\cos n\pi + 1) =$$

$$= \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{4A}{n\pi} & , \text{ wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Das bedeutet, es entfallen nicht nur alle Cosinusglieder, sondern auch sämtliche geradzahlige Sinusglieder; übrig bleibt die trigonometrische Reihe

$$f(t) = b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_5 \sin 5\omega t + \dots =$$

$$= \frac{4A}{\pi} \sin \omega t + \frac{4A}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4A}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots ;$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) ;$$

Die ersten drei Fourierpolynome zu  $f$  haben folgende Gestalt:

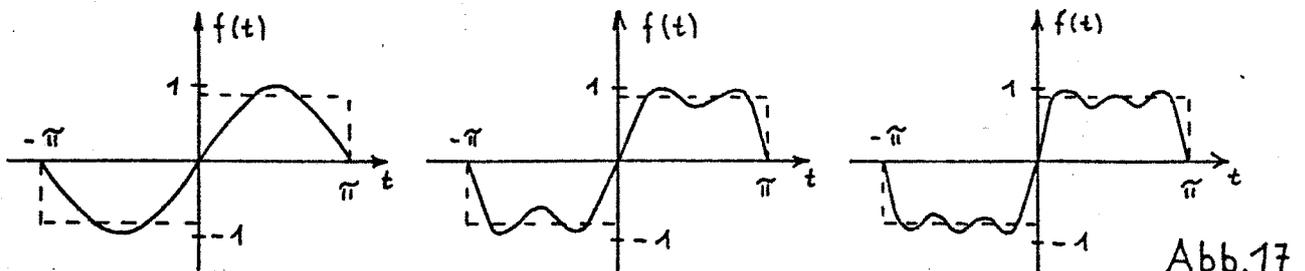


Abb.17

Man erkennt aus Abb.17 deutlich, daß die Fourierpolynome sich mit steigendem Grad immer enger an  $G_f$  anschließen; sie konvergieren gegen  $G_f$ .

### 4.3.2 FOURIERANALYSE DER SÄGEZAHNSCHWINGUNG

Die Sägezahnschwingung (Abb.18) ist gegeben durch die Gleichung  $f(t) = k \cdot t$ ;  $k \in \mathbb{R}$ ; sie verläuft periodisch mit der Periodendauer  $T = 2\pi$  (Einheit beispielsweise s) und der Kreisfrequenz  $\omega = 1$  (Einheit beispielsweise  $s^{-1}$ ).

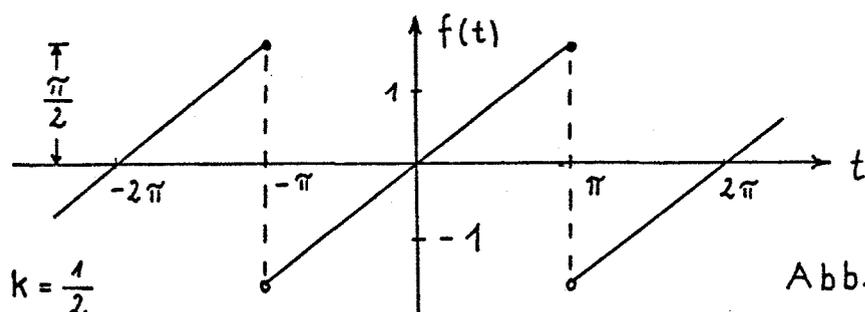


Abb. 18

Für die Bestimmung der reellen Fourierkoeffizienten kann hier auch der Weg über die komplexe Fourieranalyse beschritten werden, da das Integral (4.5) im Integrationsintervall von  $-\frac{T}{2}$  nach  $+\frac{T}{2}$  relativ einfach zu bestimmen ist<sup>8</sup>.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} k \cdot t \cdot e^{-in\omega t} dt = \frac{k}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} t \cdot e^{-int} dt = \\ &= \frac{k}{2\pi} \cdot \left[ e^{-int} \cdot \left( \frac{t}{-in} + \frac{1}{n^2} \right) \right]_{-\pi}^{+\pi} = \end{aligned}$$

<sup>8</sup> allgemein gilt  $\int x e^{mx} dx = e^{mx} \cdot \left( \frac{x}{m} - \frac{1}{m^2} \right)$ ;  $m \neq 0$

$$= \frac{k}{2\pi} \cdot \left[ e^{-in\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{-in} + \frac{1}{n^2} \right) - e^{in\pi} \cdot \left( \frac{\pi}{in} + \frac{1}{n^2} \right) \right] =$$

$$= \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{-in} \cdot ( e^{-in\pi} + e^{in\pi} ) = i \cdot \frac{k}{2n} \cdot 2\cos n\pi ;$$

$$\Rightarrow \underline{c}_n = 0 + i \cdot \frac{k}{n} \cos n\pi = \begin{cases} 0 + i \cdot \frac{k}{n} & , \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 + i \cdot \left( -\frac{k}{n} \right) & , \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offenbar besitzen sämtliche komplexe Fourierkoeffizienten von  $f$  keine Realteile. Daraus folgt für die reellen Fourierkoeffizienten :

$$a_n = 2 \cdot \text{Re}(\underline{c}_n) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = -2 \cdot \text{Im}(\underline{c}_n) = \begin{cases} -\frac{2k}{n} & , \text{wenn } n \text{ gerade} \\ +\frac{2k}{n} & , \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

Dieses Ergebnis bestätigt den Satz 4 , denn  $f(t) = k \cdot t$  ist eine ungerade Funktion. Man erhält für die Fourierreihe von  $f$  :

$$f(t) = 2k \cdot \sin \omega t - k \cdot \sin 2\omega t + \frac{2}{3} k \cdot \sin 3\omega t - \frac{1}{2} k \cdot \sin 4\omega t + \dots ;$$

$$f(t) = 2k \cdot \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right) ;$$

Abb.19 zeigt die Konvergenz der ersten drei Fourierpolynome an  $G_f$  :

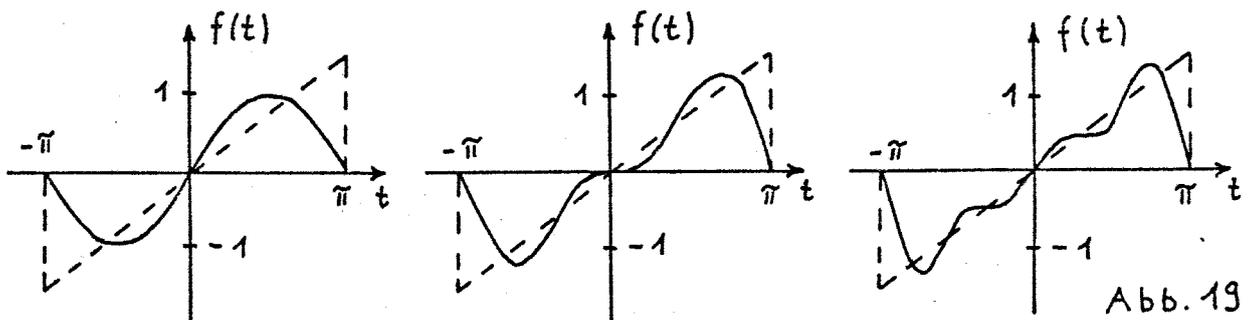
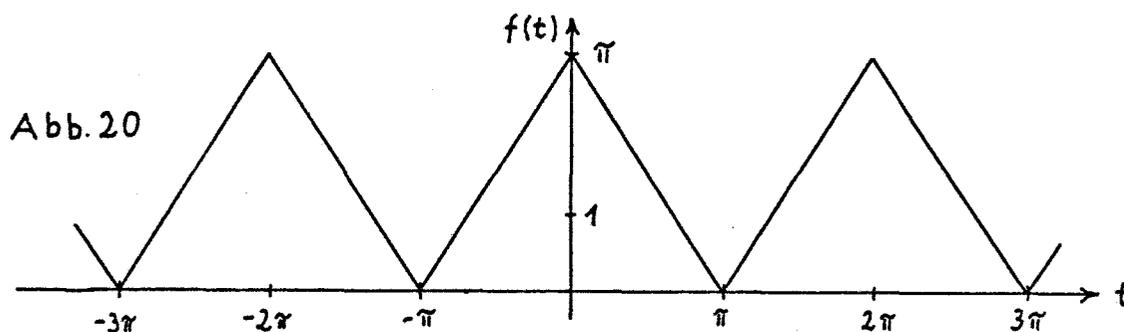


Abb.19

### 4.33 FOURIERANALYSE DER DREIECKSCHWINGUNG

Eine Dreieckschwingung sei gegeben durch  $f(t) = |\pi - t|$ ; der Einfachheit halber wählt man für ihre Periode das Intervall  $[0; 2\pi[$ , also  $T = 2\pi$  (Einheit z.B. s) und  $\omega = 1$  ( $s^{-1}$ ).



Da  $f(t)$  eine gerade Funktion ist, folgt aus Satz 3 für ihre Fourierkoeffizienten:

$$b_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} |\pi - t| \cdot \cos n\omega t \, dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+; n \neq 0$$

Auf die Betragszeichen kann verzichtet werden, da das Argument des Betrages im Integrationsintervall ohnehin positiv ist, also:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \pi \cdot \int_0^{\pi} \cos nt \, dt - \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt \right]$$

Durch Integration<sup>9</sup> erhält man:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \pi \left[ \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \left[ \frac{1}{n^2} \cos nt + \frac{t}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} \right] =$$

<sup>9</sup> allgemein ist  $\int (x \cdot \cos nx) \, dx = \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{x}{n} \sin nx$ ;  $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \cos nt + \frac{t}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} = \\
 &= -\frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{2}{\pi n^2} \cdot (1 - \cos n\pi) = \\
 &= \begin{cases} 0 & , \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n^2} & , \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad n \neq 0
 \end{aligned}$$

Der Summand  $a_0$ , der identisch ist mit dem Mittelwert von  $f$  während einer Periode und gesondert betrachtet werden muß, errechnet sich gemäß Satz 3 :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} (\pi - t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \pi t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} ;
 \end{aligned}$$

Die Fourierreihe der gegebenen Dreieckschwingung lautet demnach:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos t + \frac{4}{3^2 \pi} \cos 3t + \frac{4}{5^2 \pi} \cos 5t + \dots$$

Abb.21 verdeutlicht die zunehmende Annäherung der ersten drei Fourierpolynome an den Graphen  $G_f$  :

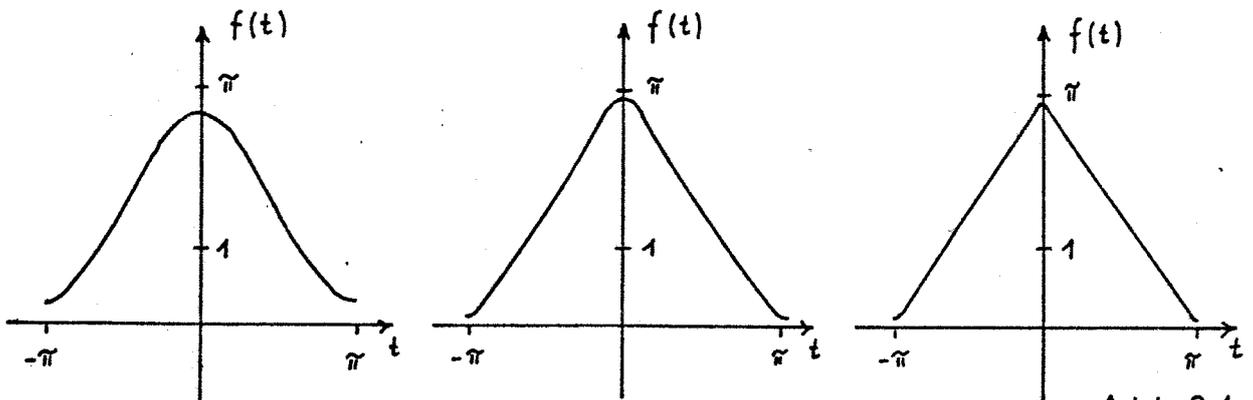


Abb.21

LITERATURVERZEICHNIS

Baierlein, Barth, Greifenegger, Krumbacher ; Anschauliche  
Analysis 2, Leistungskurs ; München 1984

Barner, M., Flohr, F. ; Analysis 1 ; Berlin 1983

Dittmann, H. ; Komplexe Zahlen ; München 1974

Gerthsen, Kneser, Vogel ; Physik ; Berlin 1977

Kastner, G. ; Einführung in die Mathematik für Naturwissen-  
schaftler ; Mannheim 1968

Keil, Kratz, Müller, Wörle ; Analysis 2 ; München 1976

Lippmann, H. ; Schwingungslehre ; Mannheim 1968

Magnus, K. ; Schwingungen ; Stuttgart 1961

Meschkowski, H. ; Unendliche Reihen ; Mannheim 1962

Meyer, E., Guicking, D. ; Schwingungslehre ; Braunschweig 1974

Projektgruppe Mathematik ; Fourierreihen ; Tübingen 1979

Studienbücherei Autorenkollektiv ; Mathematische Hilfsmittel ;  
Berlin 1974

Telefunken GmbH ; Telefunken Laborbuch, Band 2 ;  
Ulm / Donau 1961

ERKLÄRUNG

Ich erkläre, daß ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benützt habe.

Eckersdorf, den ..... ..